

ДОСМАҒҰЛОВА ҚАРЛЫҒАШ АЛМАТҚЫЗЫ

ҚИЫЛҒАН РИМАНДЫҚ СФЕРАДАҒЫ ЛАПЛАС-БЕЛЬТРАМИ
ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ҚИСЫНДЫ ШЕШІЛЕТІН ЕСЕПТЕР

«8D05401-Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияға

АНДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Эллиптикалық тендеулер үшін жалпы шекаралық мәселелер теориясының алғашқы жетістіктері потенциалдар әдісіне байланысты шекаралық мәселені эквивалентті түрде тұрақты интегралдық тендеуге айналдыруға мүмкіндік берді. Әсіресе, Фредгольм теориясын шекаралық мәселелерге қолдану шекаралық мәселе операторының ядросы мен коядросы шектеулі өлшемді екенін айтуға мүмкіндік берді.

Жоғарыда аталған деректерді ескере отырып, осы диссертацияның негізгі мақсатын қойылды. Мақсаттарға жету үшін келесі міндеттер қойылған:

1. Бір нүктесі ойылған екі өлшемді сферадағы Лаплас-Бельтрами операторын қарастыру. Грин функциясын құру және қисынды шешілетін есепті тұжырымдау. Оператор спектрін зерттеу.
2. Бір кесіндісі ойылған екі өлшемді сферадағы Лаплас-Бельтрами операторын қарастыру. Бұрын алынған нәтижелер негізінде қисынды шешілетін есепті тұжырымдау.
3. Төрт өлшемді кеңістіктегі үш өлшемді сферадан гипержазықтыққа жатпайтын шеңбері алынған Лаплас-Бельтрами операторын қарастыру. Осы жағдайға қисынды шешілетін есепті құру.

Зерттеу мақсаты мен міндеттері. Негізгі мақсат – риман сферасындағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін қисынды шешілетін есептерді құру және риман көпбейнесіндегі кейбір дифференциалдық операторлардың спектрлік теориясын дамыту.

Диссертацияны қорғауға ұсынылатын негізгі тұжырымдар:

- 1) Екі өлшемді ойылған сферадағы Лаплас-Бельтрами операторының қисынды шешілетіндігін зерттеу, максималды операторды және оның кері шектемелерін анықтау. Шектеулі ойылған нүктелері бар Лаплас-Бельтрами операторының Грин функциясын зерттеу. Лаплас-Бельтрами операторының δ -тәрізді ауытқуларының спектрлік қасиеттерін талдау;
- 2) Ашық доғамен қиылған екі өлшемді сферадағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін шешімі бірегей қисынды қойылған есепті құру және зерттеу;
- 3) Тұйық доғасы алынған үш өлшемді сферадағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін шешімі бірегей қисынды қойылған есепті құру және зерттеу;

4) Лаплас-Бельтрами операторы және ауытқыған гармоникалық осциллятор үшін спектрлік мәселені қою және операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеу.

Зерттеу объектілері – риман көпбейнесіндегі дифференциалдық операторлар.

Зерттеу пәні – қисынды есептердің шешімділігі және жалғыздығы, шешімдердің қасиеттері.

Зерттеу әдістері. Қиылған риман сферасындағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін қисынды шешілетін есептерді шешу әдістері әдетте математикалық талдау, дифференциалдық геометрия және сандық әдістердің комбинациясын қамтиды.

Қиылған риман сферасын сипаттайтын математикалық негіздеме жасалған. Бұл негіздеме беттің дифференциалдық геометриялық сипаттамасын, кесінділердің топологиялық ерекшеліктерін қарастыруды және осы контексте Лаплас-Бельтрами операторын анықтауды қамтиды.

Сонымен қатар, қиылған бетте Лаплас-Бельтрами операторын қамтитын айнымалы бөлшектер теңдеуі сипатталған. Бұл теңдеуге оператор, шекаралық шарттар және зерттеліп отырған мәселеге қатысты басқа да шарттар анықталған.

ДТДТ шешімдерінің бар болу және бірегей болу шарттары дәлелденген. Бұл қисынды шешілетін есептерді анықтау үшін өте маңызды кезең болып табылады және көбінесе функционалдық талдау мен айнымалы бөлшектер теңдеулері теориясының теоремаларын қолдануды талап етеді.

Қиылған риман сферасының топологиясын зерттеп, кесінділердің орналасуы мен олардың бет геометриясына әсерін талдадық.

Зерттеудің жаңалығы. «Қиылған риман сферасындағы Лаплас-Бельтрами операторы үшін қисынды шешілетін есептер» зерттеуі Лаплас-Бельтрами операторының кесінділері және ойылған риман сферасында математикалық мәселелерді шешуге жаңа әрі инновациялық тәсіл ұсынады.

Зерттеу Лаплас-Бельтрами операторын үзілістері немесе қиылған риман сферасында қарастырады. Бұл көбіне біркелкі, үзіліссіз көпқабатты деп қаралатын дәстүрлі талдаудан ерекшеленеді. Кесінділердің енгізілуі зерттелетін мәселелердің ауқымын кеңейтеді.

Қисынды шешілетін есептер термині шешімдерді табудың қатесіз және нақты анықталған тәсілін білдіреді. Зерттеу қиылған сферадағы Лаплас-Бельтрами операторымен байланысты қандай есептер қисынды шешілетінін анықтайтын жүйелі негіздемені енгізеді. Бұл шешімдердің бар болу және бірегей болу шарттарын анықтауды қамтиды.

Зерттеу қиылған риман сфераларының геометриялық және топологиялық аспектілерінің өзара байланысын зерттейді. Бұл байланыс оператордың мұндай стандарт емес орталардағы өзгерісін түсінуде маңызды және беттер геометриясына тереңірек көзқарас береді.

Зерттеу негізінен теориялық тұрғыдан жасалғанымен, ол физика, инженерия және информатика сияқты әртүрлі салаларда практикалық маңызға ие. Қиылған беттердегі Лаплас-Бельтрами операторын түсіну жылу таралуы,

толқындардың таралуы және бұрыштары қисық беттердегі деректерді талдау сияқты мәселелерге қатысты.

Зерттеу мұндай беттерде айнымалы бөлшектер теңдеулерін шешуге арналған жаңа математикалық құралдар мен әдістерді енгізеді. Бұл құралдар математикада кеңінен қолданылуы мүмкін және жаңа зерттеу бағыттарын ашады.

Ойылған нүктелердің бар болуы Лаплас-Бельтрами операторы қатысатын есептерді шешуде есептеу қиындықтарын туғызады. Зерттеу осы қиындықтарды шешудің немесе жеңудің жаңа әдістерін ұсынуы мүмкін, бұл сандық модельдеу жұмыстарымен айналысатын зерттеушілер үшін маңызды үлес болып табылады.

Қорытындылай келе, зерттеудің жаңалығы қиылған риман сфераларындағы Лаплас-Бельтрами операторы мәселелерін қарастыруда, қисынды шешілетін есептерге баса назар аударуында және оның математика мен қолданбалы салаларға ықпалдастық мүмкіндіктерінде жатыр. Ол стандарт емес геометриялық ортадағы айнымалы бөлшектер теңдеулері туралы жаңа көзқарас ұсынады және әрі қарайғы зерттеулер мен практикалық қолдануларға жол ашады.

Теориялық және практикалық маңызы. Диссертациялық зерттеудің маңыздылығы зерттеу нысандары – риман көпбейнесіндегі Лаплас-Бельтрами операторы – тек математикалық ғылымда ғана емес, сонымен қатар механика, физика, биология және басқа жаратылыстану ғылымдарында да аса маңызды болуының арқасында түсіндіріледі. Сонымен қатар, бұл мәселелерге математикалық тұрғыдан да үлкен қызығушылық бар. Сондықтан алынған нәтижелер әлемдік зерттеушілер үшін өзекті әрі түсінікті болып, болашақ зерттеулерге құнды негіз бола алады.

Диссертацияның көлемі мен құрылымы. Диссертацияға тақырыптық бет, мазмұны, кіріспе, бастапқы мәліметтер, төрт тарау, қорытынды және әдебиеттер тізімі кіреді. Диссертацияның жалпы көлемі 100 бет, әдебиеттер тізімінде 61 атау бар.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі, мақсаттары мен міндеттері, қорғауға ұсынылатын негізгі тұжырымдар, зерттеу объектісі мен пәні, диссертация тақырыбының басқа ғылыми жұмыстармен байланысы, жұмыстың апробациясы, автордың жарияланымдары, көлемі мен құрылымы баяндалады.

1-тарауда риман шекарасы жоқ көпбейнесіндегі Лаплас-Бельтрами операторының δ -тәрізді бұрмаланулары қарастырылады.

Сондай-ақ, $\mathbb{R}^3$ кеңістігіндегі екі өлшемді сфера риман көпбейнесі ретінде қарастырылады. Ұқсас құрылымдар шекарасы жоқ тегіс көпбейнелердегі Лаплас-Бельтрами операторы үшін де жасалуы мүмкін. Басқа мүмкіндіктерге шекарасы бар тегіс көпбейнелердегі сызықты дифференциалдық операторлардың дұрыс шектемелерін сипаттау жатады. Соңында, әртүрлі өлшемді компоненттерден тұратын шекарасы бар көпбейнелердегі эллиптикалық дифференциалдық операторлардың қисынды шешілетін есептерін сипаттау мәселесі қызықтырады. Сонымен қатар, екі

өлшемді сферада анықталған ауытқыған Лаплас-Бельтрами операторының Грин функциясы енгізіледі. Ойылған сферадағы кез келген нүкте үшін сызықты функционалдар сипаттамалары беріледі. Грин функциясының $\varepsilon_\gamma(x, t)$ түрпаты $\varepsilon(x, t)$ арқылы өрнектері келтіріледі.

2-тарауда сферадан белгілі бір кесінді алынып тасталады, ал осы кесіндіде шешімнің бірегейлігін қамтамасыз ету үшін қосымша шарттар зерттеледі.

3-тарауда төрт өлшемді кеңістіктегі үш өлшемді сферадан шеңбер алынып тасталады. Оператор Лаплас-Бельтрами теңдеуі үшін алынған қисынды шешілетін есептер сипатталады. Осы тақырыптағы мәселелердің класы талқыланады.

4-тарауда екі өлшемді сферада анықталған ауытқыған Лаплас-Бельтрами операторының меншікті функциялары қарастырылады. Ойылған сферадағы кез келген нүкте үшін сызықты функционалдар сипаттамасы беріледі. Оператордың меншікті мәндері мен меншікті функциялары арасындағы байланыс көрсетіледі, және меншікті функциялар жүйесінің толық сипаттамасы беріледі. Бұл жұмыста ойылған екі өлшемді сферадағы Лаплас-Бельтрами операторының спектрінің дискреттілігі дәлелденеді. Сондай-ақ, бірінші функционал интеграл арқылы анықталатын және қалған екеуі нөлге тең болатын сызықты үзіліссіз функционалдардың мысалы келтіріледі. Бұл мысал ауытқыған операторға арналған алдыңғы нәтижелерді қолдану арқылы дәлелденген теореманың нақты қолданылуы болып табылады. Лаплас-Бельтрами операторларының изометрияларға қатысты инвариантты болуы спектрдің изометриялық риман көпбейнесінде сәйкестігін білдіреді, яғни спектр – изометриялық инвариант.

4-тараудың екінші бөлімінде ауытқыған гармоникалық осциллятордың меншікті функциялары зерттеледі. Кез келген нүкте үшін сызықты функционалдардың сипаттамалары беріледі. Оператордың меншікті мәндері мен ауытқыған және ауытқымаған операторлардың меншікті функциялары арасындағы байланыс көрсетіледі. Гармоникалық осциллятор спектрінің дискреттілігі дәлелденеді. Сондай-ақ, бірінші функционал интеграл арқылы анықталып, қалған бес функционал нөлге тең болатын мысал келтіріледі. Бұл мысал да ауытқыған операторға арналған алдыңғы нәтижелерді қолданумен дәлелденген теореманың нақты қолданылуы болып табылады.

Қорытындыда диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері ұсынылады.

Диссертация тақырыбының басқа ғылыми зерттеулермен байланысы. Диссертация тақырыбы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің Ғылым комитетінің 2024-2026 жылдарға арналған «Жас ғалым» жобасы аясындағы жас ғалымдарға гранттық қаржыландыру ғылыми жобасы шеңберінде қолдау тапты («Риман көпбейнесіндегі дифференциалдық операторлар үшін қисынды шешілетін есеп»; 2024-2026 жылдар; АР22685565). Бұл жұмыс ғылыми дамудың басым бағыттарына сәйкес келеді: елдің интеллектуалдық әлеуеті, оның ішінде математика, механика,

астрономия, физика, химия, биология, информатика және география салаларындағы негізгі және қолданбалы зерттеулер.

Жарияланымдар және автордың еңбегі. Диссертация нәтижелері бойынша 11 жұмыс жарияланды: оның ішінде 6 мақала Scopus-қа индекстелетін журналдарда, 5 жұмыс халықаралық ғылыми конференция материалдарында жарияланды.

Олардың кейбірі:

- 1) Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere // *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Applications*. – 2023. – Vol. 7, No. 2. – P. 428–440.
- 2) Dosmagulova K., Kanguzhin B. Uniquely solvable problems for the Laplace–Beltrami operator on a sphere punctured by a curve // *Results in Nonlinear Analysis*. – 2023. – Vol. 6, No. 3. – P. 43–49.
- 3) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E., Fazullin Z.Y. Spectrum of the perturbed harmonic oscillator // *Applied Mathematics and Information Sciences*. – 2023. – Vol. 17, No. 4. – P. 553–557.
- 4) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Green’s function of the perturbed Laplace–Beltrami operator with a finite number of punctures on the two-dimensional sphere // In: *Women in Analysis and Partial Differential Equations. Series: Trends in Mathematics*. – Vol. 5. – Cham: Birkhäuser, 2024. – P. 145–151.
- 5) Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A., Akanbay Y.E. On the Laplace–Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. – 2025. – Vol. 125, No. 1. – P. 33–42.
- 6) Dosmagulova K.A., Kanguzhin B.E. Well-posed problems for the Laplace–Beltrami operator // *Symmetry*. – 2025. – Vol. 17, No. 9. – P. 1–12.